

ПРЕДИСЛОВИЕ

С недавних пор обучение в высших учебных заведениях стало менее строгим, и я слышал, что бывают студенты электротехнических факультетов, которые плохо понимают работу электрических цепей. И я сам, преподавая в университете как раз на подобном факультете, сталкивался со студентами, которые не могут решить простых задач, связанных с электрическими цепями. И я стал думать, как же решить эту проблему. Я не смог найти никакого магического средства, но понял, что многие студенты, не понимающие электрических цепей, не понимают комплексных чисел. И тогда, посоветовавшись с издательством Ohmsha, мы решили сделать эту книгу.

Мнимое число, по-английски Imaginary number, – это число, созданное воображением. При этом почему-то по-русски оно называется «мнимым», и это название вызывает не самые хорошие ассоциации. Но разве числа, называемые действительными, при этом существуют в реальном мире? Люди придумали числа, но природные явления до чисел и после их появления одинаковы. Просто с помощью чисел и формул люди описывают явления природы, чтобы лучше их понять.

Итак, комплексные числа являются мощным инструментом для расчёта колебаний силы тока и напряжения в электрических цепях, особенно для переменного тока. А поскольку на электротехнических факультетах изучают в основном переменный ток, то если студент не умеет представлять напряжение и силу тока в виде комплексных чисел, то он не сможет получать хорошие оценки. Кроме того, есть и множество других специализаций, так или иначе связанных с электричеством, то есть и на квалификационных экзаменах других факультетов часто попадаются задачи по переменному току, для решения которых нужно использовать мнимые и комплексные числа.

Моя цель – чтобы эту книгу в качестве руководства по мнимым и комплексным числам прочитало как можно больше людей. И если кто-то из них после прочтения будет лучше разбираться в комплексных числах, почувствует интерес к решению задач по электрическим цепям с использованием мнимых и комплексных чисел, я буду счастлив.

Я хочу поблагодарить за помощь и советы по работе над книгой всех сотрудников отдела по развитию издательства Ohmsha, сделавших интересными и понятными мою скучную рукопись господина Нагакава Наруки и господина Исино Тои, а также всех сотрудников TREND-PRO.

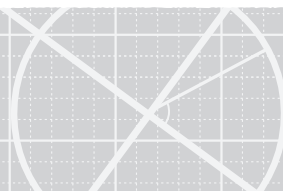
И в заключение хочу подчеркнуть, что эта книга не является профессиональным руководством, и с точки зрения математики в ней, возможно, появляются не совсем корректные выражения. Но главной задачей этой книги было дать простое и наглядное объяснение для начинающих, что из себя представляют комплексные и мнимые числа. И именно это ставилось во главу угла.

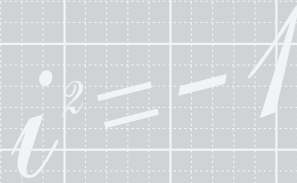
Ноябрь 2010

Оучи Масаси

СОДЕРЖАНИЕ

Пролог. НАЧАЛО ИСТОРИИ	1
1. ВИДЫ ЧИСЕЛ	13
1. ВИДЫ ЧИСЕЛ	17
ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ	18
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА	19
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА	20
2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ	22
3. ВВЕДЯ МНИМОЮ ЕДИНИЦУ i , МОЖНО РЕШИТЬ ЛЮБОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ	28
4. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ	34
5. ВЫВЕДЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ	36
6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ	38
2. ОТ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ i К КОМПЛЕКСНОМУ ЧИСЛУ $a + bi$	41
1. ПЕРЕХОД К КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ	45
2. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (МОДУЛЬ, АРГУМЕНТ) И КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ	48
3. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ	57
4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ	60
5. СОПРЯЖЁННЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	63
6. УПРАЖНЕНИЯ	71
3. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	77
1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	82
2. УПРАЖНЕНИЯ	91
4. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА, СВЯЗЫВАЮЩАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	97
1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА	98





2. ЧИСЛО НЕПЕРА (ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЛОГАРИФМА) e	102
3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА	106
4. ФОРМУЛА МУАВРА	109
5. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА	110
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ e^x	113
7. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЧИСЛА e	115

**5. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ 119**

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ	124
2. ВЫВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ	128
3. УПРАЖНЕНИЯ	133

**6. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.
УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ.
ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. 139**

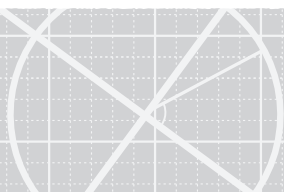
1. УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ	143
2. ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ	151
3. ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗНЫХ УГЛОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ГРАДУСНОЙ И РАДИАННОЙ МЕРАХ	157
4. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ.	158
5. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ	159
6. ПОЧЕМУ $(-1) \cdot (-1) = 1$?	161

**7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ
КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. 163**

1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК	168
2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ	172
3. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СЕТЕВОГО НАПРЯЖЕНИЯ	193
4. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ.	193

ПРИЛОЖЕНИЕ 201

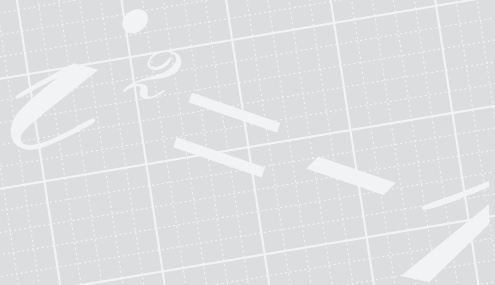
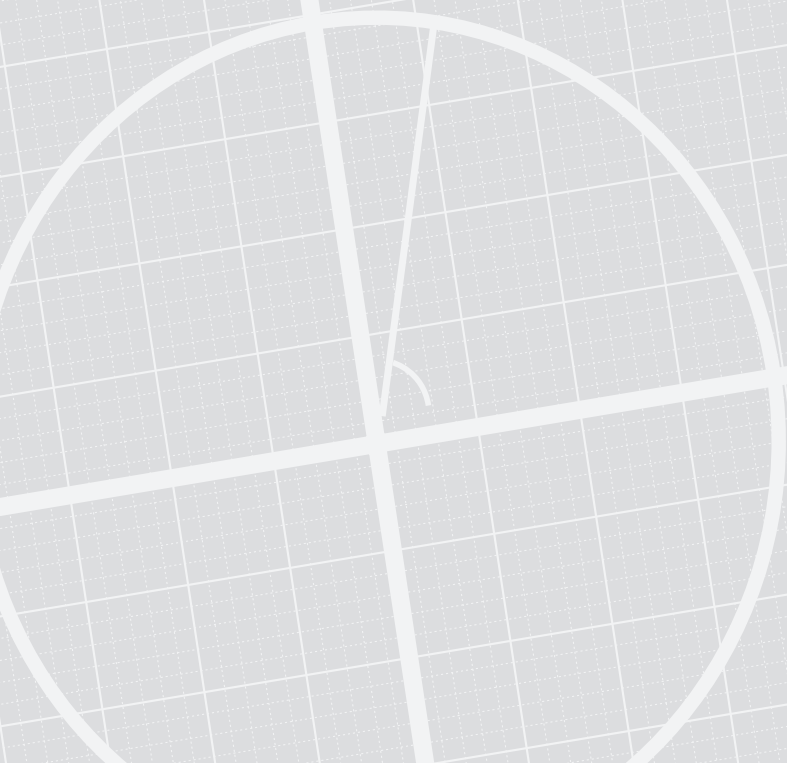
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ. 222

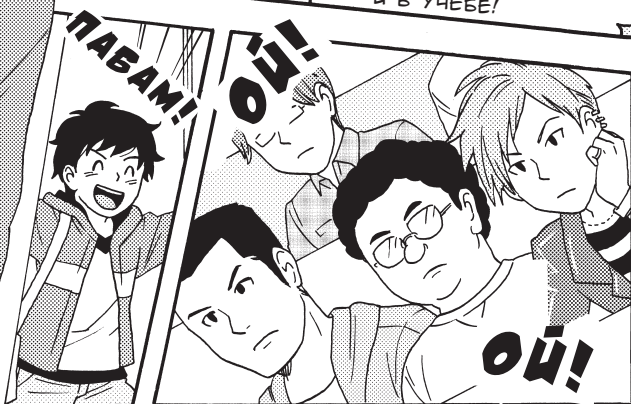




Пролог

НАЧАЛО ИСТОРИИ





ТИШИНА.
ИДЁТ
ЭКЗАМЕН.



ПОТОМУ ЧТО Я
ТОГДА СБЕЖАЛ,
ТЕПЕРЬ ВСЁ
ТАК ПЛОХО...

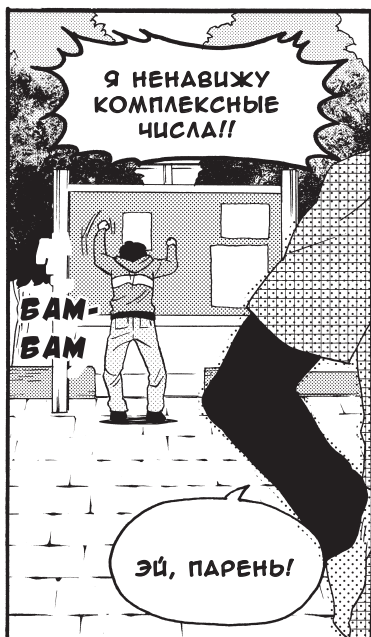
НЕ ПОНИМАЮ Я ЭТИ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА...
НО ОДНУ ВЕЩЬ
Я ХОРОШО ПОНЯЛ...

БАЦ!

ПО РЕЗУЛЬТАТАМ
ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ
СЛЕДУЮЩИЕ СТУДЕНТЫ
ОТПРАВЛЯЮТСЯ НА ПЕРЕДАЧУ:

1011023 САКУРАЙ ЮТА

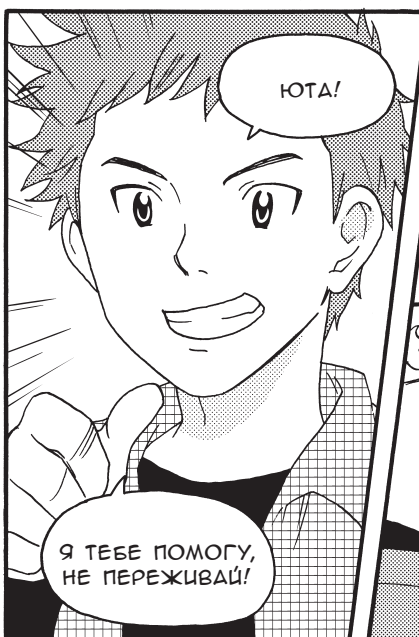
1011041 ХАСИМОТО РЁ



Я НЕНАВИЖУ
КОМПЛЕКСНЫЕ
ЧИСЛА!!

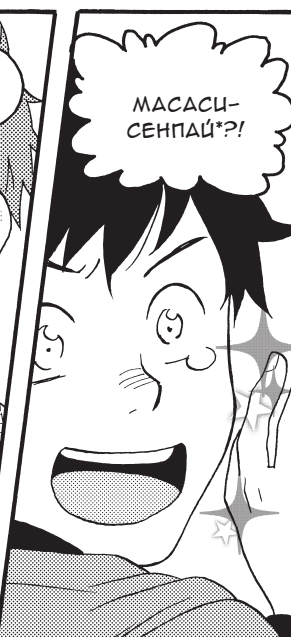
БАМ-
БАМ

Эй, ПАРЕНЬ!



ЮТА!

Я ТЕБЕ ПОМОГУ,
НЕ ПЕРЕЖИВАЙ!



МАСАЦИ-
СЕНПАЙ*?!

* Сенпай – обращение к более старшему по возрасту, рангу или более опытному коллеге/соученику. В данном случае означает, что Масаси учится на более старшем курсе.



ПОВТОРНЫЙ
ЭКЗАМЕН
ПО МАТЕМАТИКЕ



СЕНПАЙ ЖЕ САМ
НА ПЕРЕСАДЧЕ!!

И чего у него такое
самодовольное лицо?!

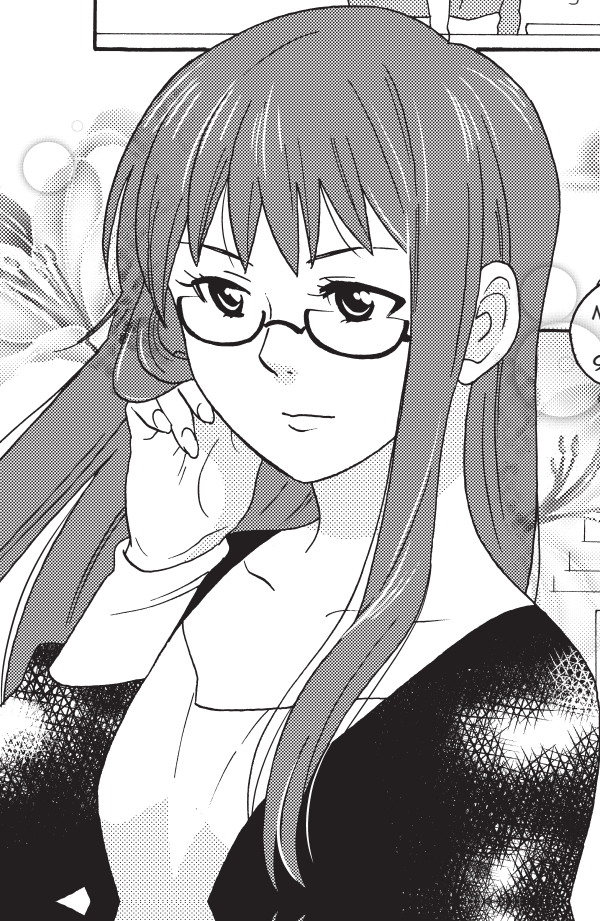


ЕСЛИ ЗАВАЛИМ,
ТО ЕЩЁ ОДИН ГОД
ВМЕСТЕ ПРОУЧИМСЯ!

.ХА-ХА-ХА

ПАМ

ДА НА ЭТОГО
СЕНПАЯ НЕЛЬЗЯ
ПОЛАГАТЬСЯ...



МОЯ ФАМИЛИЯ
ХИМУРО.
Я АСПИРАНТКА.

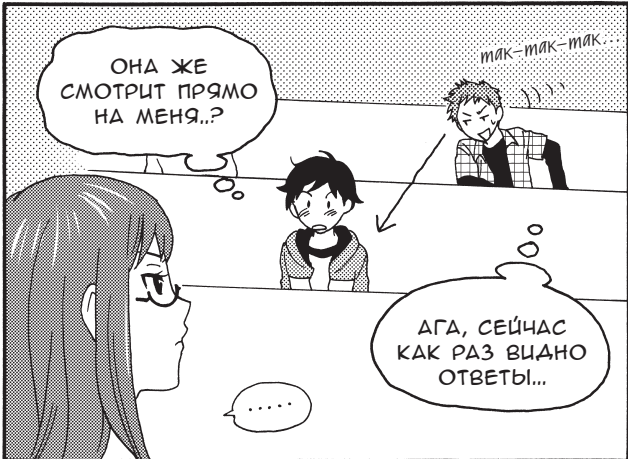
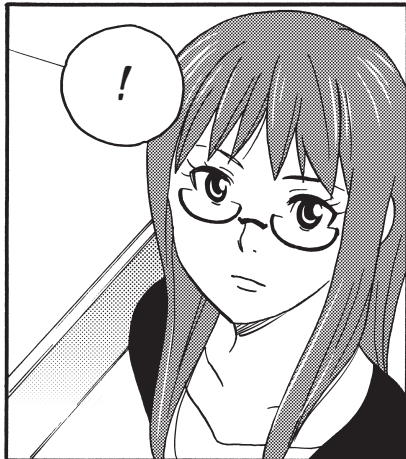
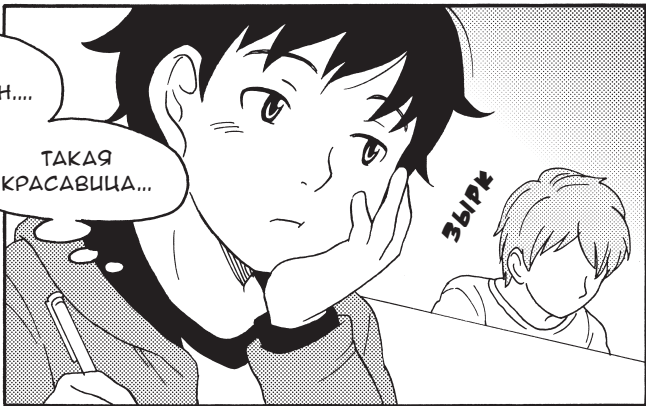
СТУК
СЕРДЦА

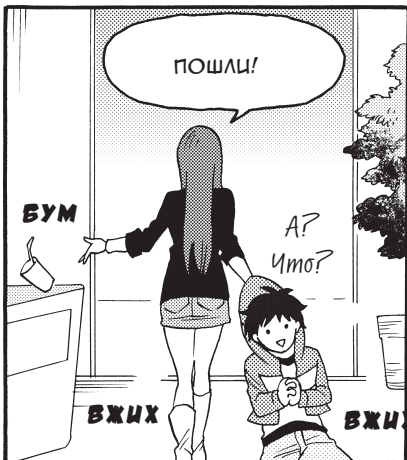
У ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
ПОЯВИЛИСЬ СРОЧНЫЕ ДЕЛА,
ТАК ЧТО ЗА ЭКЗАМЕНОМ
БУДУ НАБЛЮДАТЬ Я.



ХИМУРО-САН....

ТАКАЯ
КРАСАВИЦА...





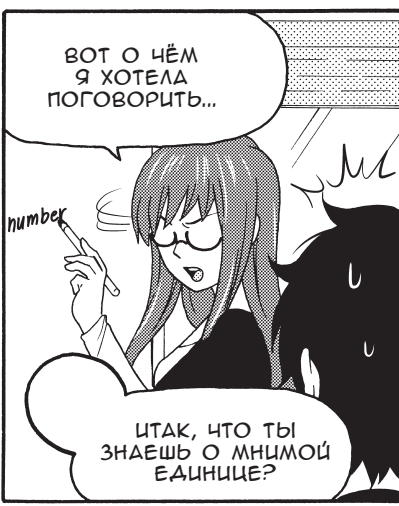


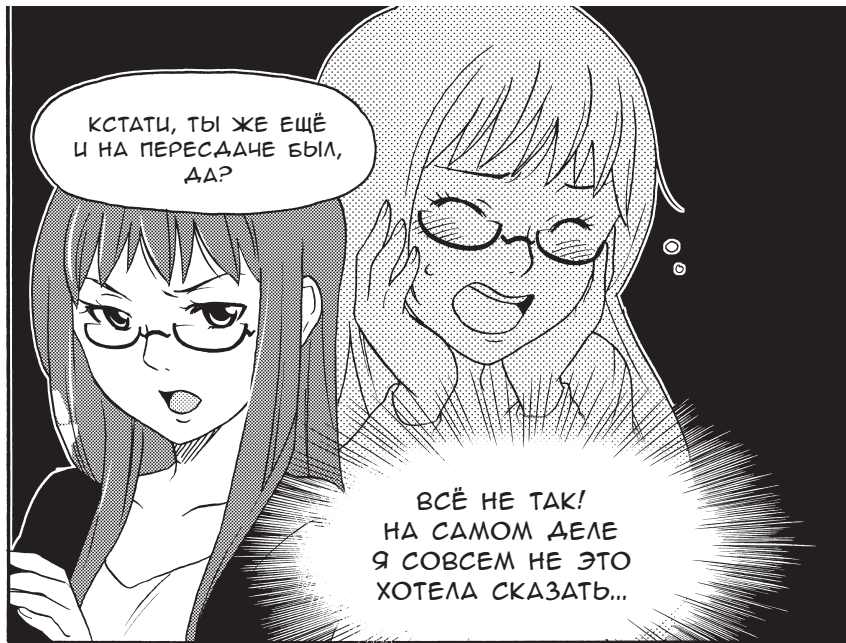
ИТАК...

...К ЧИСЛУ "1"!

Мнимая единица "i"

ДАВАЙ ПОГОВОРИМ
О ЛЮБВИ...



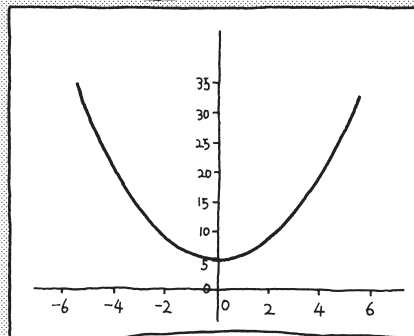


ВОТ ВЫ СКАЗАЛИ,
ЧТО ЭТО ЧИСЛО СОЗДАНО
ЧЕЛОВЕЧЕСКИМ ВООБРАЖЕНИЕМ,
А ДЛЯ ЧЕГО ЕГО СОЗДАЛИ?



АГА...
С ЧЕГО БЫ НАМ
ЛУЧШЕ НАЧАТЬ?

НУ УЖ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ,
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ТЫ ЗНАЕШЬ, НЕ ТАК ЛИ?



И ПОМНИШЬ, ЧТО ЕСТЬ ТАКИЕ
СЛУЧАИ, КОГДА КВАДРАТНОЕ
УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ?
ВОТ ЭТОТ ГРАФИК, КОТОРЫЙ
МЕНЯ ВСЕГДА РАЗАРАЖАЕТ.



РЕШЕНИЙ НЕТ,
ЕСЛИ ГРАФИК
НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ
ОСЬ X, ТАК?

НО Я НЕ ПОЙМУ,
ЧТО В ЭТОМ МОЖЕТ
ТАК РАЗАРАЖАТЬ?

КОГДА Я УЧИЛАСЬ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ,
Я, БЫВАЛО, ВСЮ НОЧЬ НЕ СПАЛА,
ВСЁ СМОТРЕЛА НА ЭТОТ ГРАФИК,
И ТАК ОН МЕНЯ БЕСИЛ!



Как это так,
нет решения?!

МОЖЕТ, ВАМ
ПРОСТО КАЛЬЦИЯ
НЕ ХВАТАЛО?

ОДНАКО ЕСЛИ
ИСПОЛЬЗОВАТЬ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,
ТО МОЖНО СЧИТАТЬ,
ЧТО ЭТО УРАВНЕНИЕ
ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ
В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ.

ВОТ КАК?



ТАКОВА СИЛА
МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ!

ХММ... ЭЭЭ...

ЕСЛИ ЧТО-ТО
НЕ ПОНЯТНО,
ТО ТАК И СКАЖИ.



РАССМОТРИМ ЕЩЁ
ОДИН ПРИМЕР.
ТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ЗНАЕШЬ?

ни...

А... ДА, ЭТО
ОЧЕНЬ ХОРОШИЙ
ПРИМЕР.

ПЕРЕСТАНЬ
ПРИТВОРЯТЬСЯ,
ЧТО ТЫ ЗНАЕШЬ!

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2} V_m \sin(\omega t)$$

Дифференциальное
уравнение
для силы тока.

СКРИП



НИЧЕГО НЕ
ПОНИМАЮ...

Ох, и устал,
маленький...

ПРОСНИСЬ!

ЭТО УРАВНЕНИЕ НЕ ПОНЯТЬ, ЕСЛИ
НЕ ЗНАЕШЬ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
ПОЭТОМУ СЕЙЧАС СМОТРИ ТОЛЬКО
НА ЕГО ФОРМУ.

ПЕРЕПИШЕМ ЭТО УРАВНЕНИЕ,
ИСПОЛЬЗУЯ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

$$RI + j\omega LI = V$$

Алгебраическое уравнение
для силы тока

I и V - здесь
комплексные числа,
а j - мнимая единица.

ээ...

НЕ ОБРАЩАЙ
ВНИМАНИЯ НА СМЫСЛ
ЭТИХ СИМВОЛОВ,
СМОТРИ ТОЛЬКО НА
ФОРМУ УРАВНЕНИЯ.

АГА! ТЕПЕРЬ
ОСТАЛИСЬ ТОЛЬКО
ПРОИЗВЕДЕНИЕ
И СУММА!

А!

ИМЕННО.

ТАК ДАЖЕ СЛОЖНЫЕ УРАВНЕНИЯ
МОЖНО РЕШАТЬ ДОВОЛЬНО
ПРОСТО, ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

$$RI + j\omega LI = V$$

ТАДАМ!

Превратись
в простое
уравнение!

ОСОБЕННО ЭТО КАСАЕТСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ ТОК, ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ
НАПРЯЖЕНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ,
ЗВУКОВЫЕ И ДРУГИЕ ВОЛНЫ.

ВОТ ОНО ЧТО! ЧИСЛА.

ЗНАЧИТ, ДЛЯ ЭТОГО И ПРИДУМАЛИ МНИМЫЕ, ТО ЕСТЬ ВООБРАЖАЕМЫЕ, ЧИСЛА.



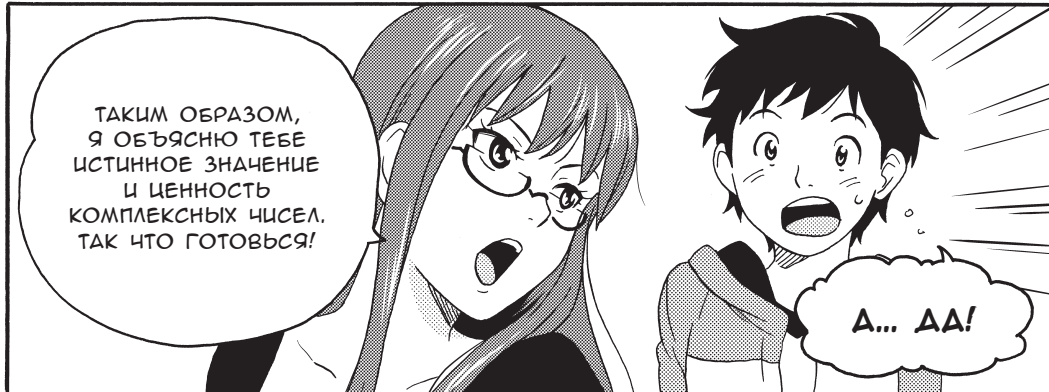
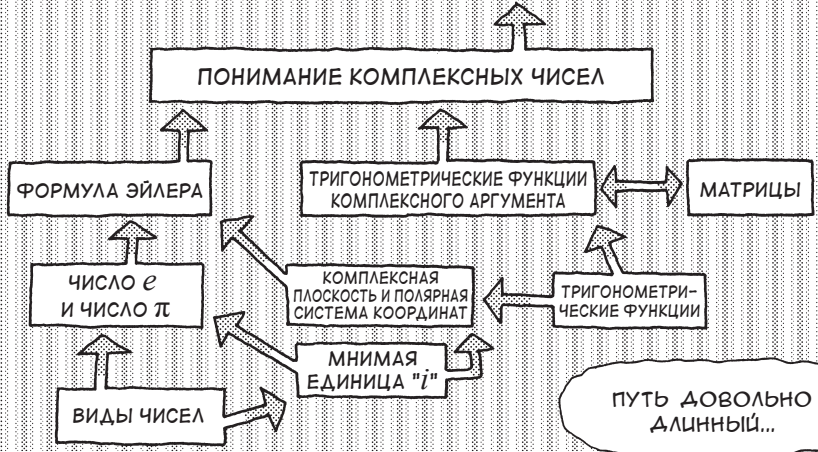
БЛАГОДАРЯ ВАМ, ХИМУРО-САН, Я ПОНЯЛ, КАК ВАЖНЫ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА!

МАЛО ПОНЯТЬ ИХ ВАЖНОСТЬ, НУЖНО ЕЩЁ НАУЧИТЬСЯ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЭТИ ЧИСЛА.

ЭТО ПУТЬ, КОТОРЫЙ НАДО ПРОЙТИ, ЧТОБЫ НАУЧИТЬСЯ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.

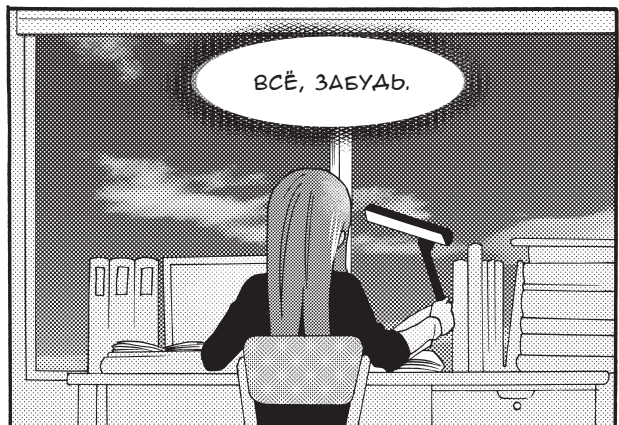
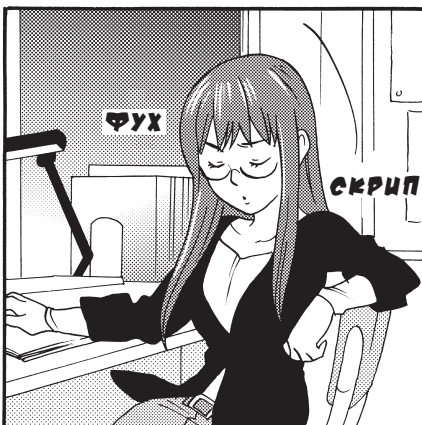
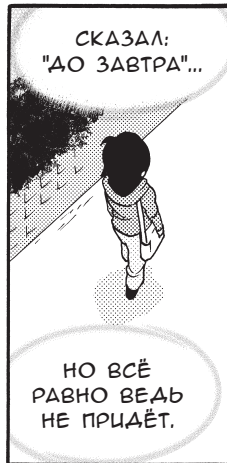
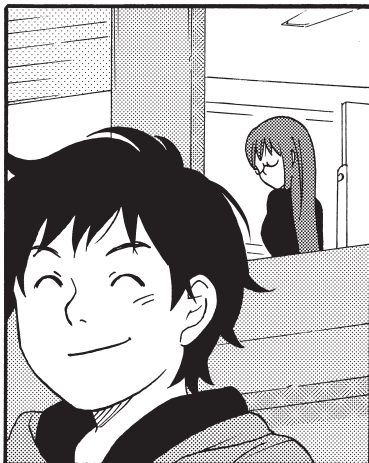
ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ВЫРАЗИМ ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО V ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ, А ЧЕРЕЗ I - ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК, ПОСЛЕ ЧЕГО ЛЕГКО РЕШАЕМ ЗАДАЧУ)



ТАКИМ ОБРАЗОМ, Я ОБЪЯСНЮ ТЕБЕ ИСТИННОЕ ЗНАЧЕНИЕ И ЦЕННОСТЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ТАК ЧТО ГОТОВЬСЯ!

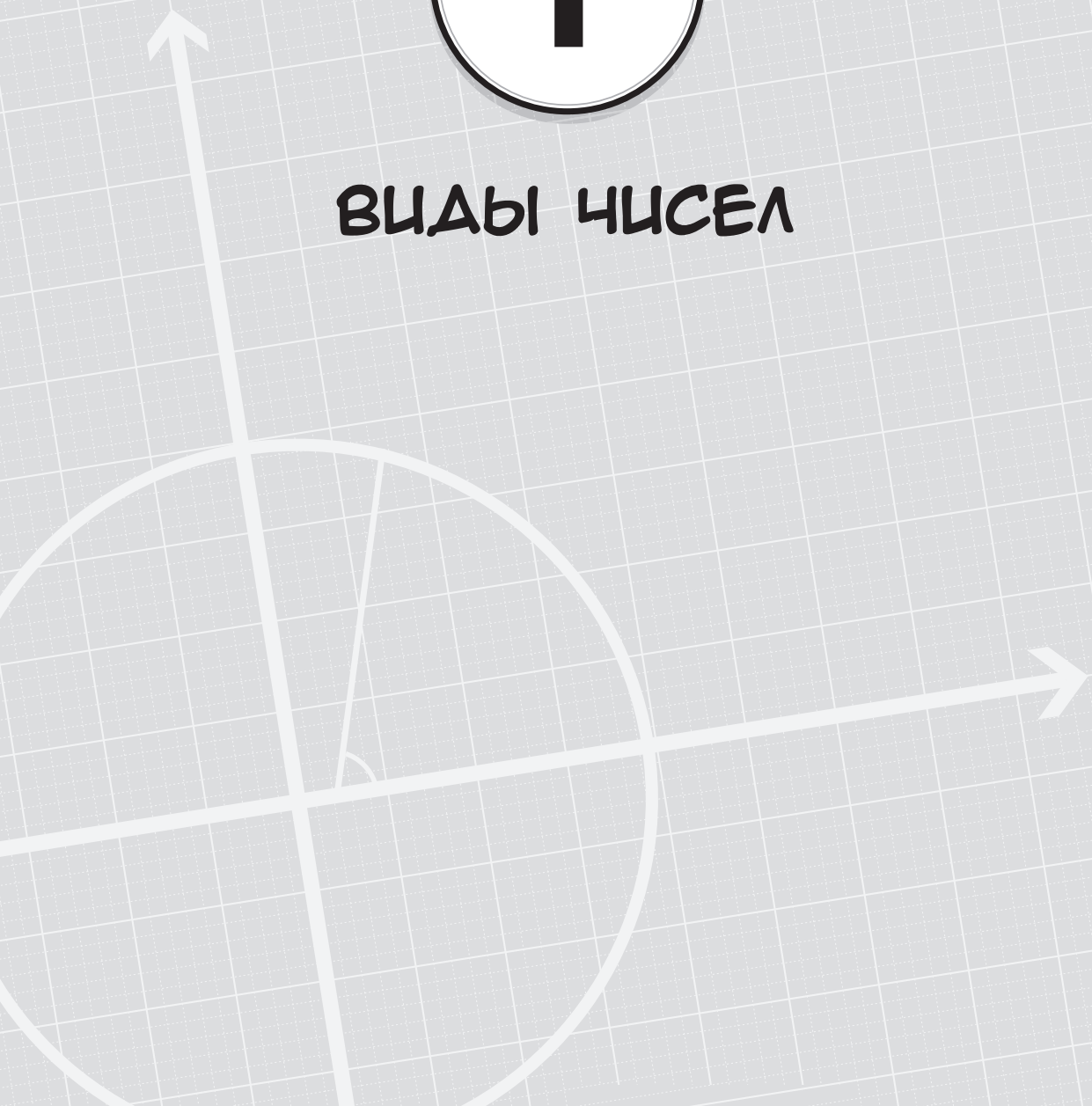
А... ДД!

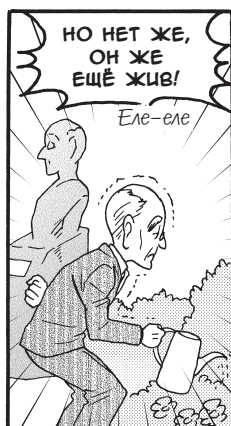
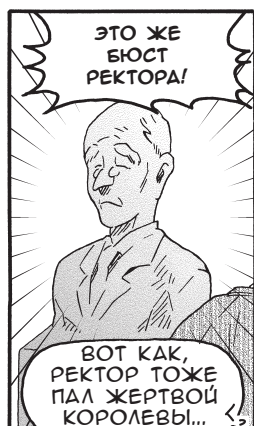


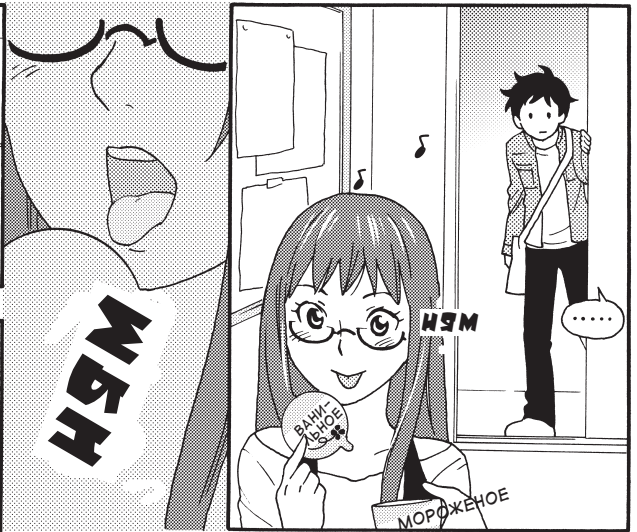
Глава

1

ВИДЫ ЧИСЕЛ









1. ВИДЫ ЧИСЕЛ

СНАЧАЛА ЛЮДИ ОТКРЫЛИ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.



МОРОЖЕНОЕ

МОРОЖЕНОЕ

МОРОЖЕНОЕ

■ НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ ИСПОЛЗУЮТ ДЛЯ СЧЁТА ПРЕДМЕТОВ.

АРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО 1, 2, 3... ДА? ВОТ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТОГДА НЕ БЫЛО БЫ НИКАКИХ ПРОБЛЕМ...

МО РО ЖЕ

А ВОТ И НЕТ.

$4 - 6 = ?$

ЕСЛИ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТО НЕВОЗМОЖНО БЫЛО БЫ ИЗ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ВЫЧЕСТЬ БОЛЬШЕЕ.

ЕСЛИ МОЖНО СЛОЖИТЬ $4 + 6$, НО ПОЧЕМУ-ТО НЕЛЬЗЯ ВЫЧЕСТЬ $4 - 6$, ЭТО УЖАСНО БЕСИТ!

Мир, в котором нет отрицательных чисел! Бесит!!

И ЧТОБЫ ЭТО ТАК НЕ РАЗАРАЖАЛО, ПРИДУМАЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ДА?

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, НОЛЬ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА ВМЕСТЕ НАЗЫВАЮТСЯ "ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА" (INTEGER). В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ НОЛЬ ЧИСТОГДА ОТНОСЯТ К НАТУРАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ.

Мир... Вступилась как... Целые числа

Группа "Целые числа"

Отрицательные числа

0

натуральные числа

Объединившись с натуральными числами...

ВОТ ОНО ЧТО.

МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА "РАСШИРЯЮТ" ПОНЯТИЕ О НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ. ЧИСЛА СОЗДАЛИ ЛЮДИ, ПОЭТОМУ И ДЕЛАТЬ С НИМИ ОНИ МОГУТ ЧТО УГОДНО.

В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ, БЛАГОДАРА ЦЕЛЫМ ЧИСЛАМ МОЖНО БЕЗ ПРОБЛЕМ ПРОИЗВОДИТЬ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ.

■ ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

ДЛЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
ТАКЖЕ НЕТ ПРОБЛЕМ
С УМНОЖЕНИЕМ.
ПОНИМАЕШЬ, ПОЧЕМУ?

УМНОЖЕНИЕ -
ЭТО МНОГОКРАТНО
ПОВТОРЕННОЕ
СЛОЖЕНИЕ,

ПОЭТОМУ ПРИ
УМНОЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОЛУЧИМ
ТОЖЕ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. ТАК?

ТОЧНО!

МОЖЕШЬ
ВЕДАТЬ, КОГДА
ЗАХОЧЕШЬ.

НО ЕСЛИ МЫ
ИМЕЕМ ТОЛЬКО
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА,
ТО ВОЗНИКАЕТ
ПРОБЛЕМА ПРИ
ДЕЛЕНИИ.

НАПРИМЕР, ЕСЛИ
РАЗДЕЛИТЬ 1 НА 3,
ЧТО БУДЕТ?

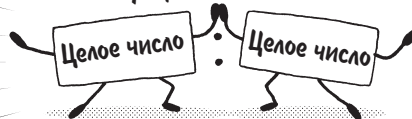
ТАК ПРОСТО
НЕ ДЕЛИТСЯ. ПОЭТОМУ
РЕЗУЛЬТАТ БУДЕТ В ВИДЕ
ОБЫЧНОЙ ДРОБИ $1/3$ ИЛИ
В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОЙ
ДРОБИ $0,333...$

ДА,
ТЕПЕРЬ Я ПОНЯЛ,
ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО
МОЖЕТ
РАЗДРАЖАТЬ.

СКАЖИ?!

ТОЛЬКО С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ
ЧИСЕЛ НЕ ВСЕГДА ВОЗМОЖНО
ПОЛУЧИТЬ ТОЧНЫЙ ОТВЕТ
ПРИ ДЕЛЕНИИ.

Разрешите представиться,
я - "рациональное число"!



И ТУТ ПОЯВЛЯЮТСЯ
"РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА" - ТО
ЕСТЬ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ МОЖНО
ВЫРАЗИТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ
ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ, НАПРИМЕР $1:3$.

И ЕЩЕ
МОМЕНТ.

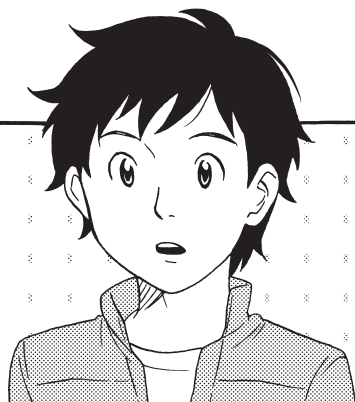
ТАКИЕ ЧИСЛА, КАК
 $0,333...$, В СОСТАВЕ
КОТОРЫХ ОДИНАКОВОЕ
ЧИСЛО ПОВТОРЯЕТСЯ
БЕСКОНЕЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО
РАЗ, НАЗЫВАЮТСЯ
БЕСКОНЕЧНЫМИ
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
ДРОБЯМИ.

НО И ЭТИ
БЕСКОНЕЧНЫЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ
ВСЕГДА МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ
КАК ОТНОШЕНИЕ ЦЕЛОГО
ЧИСЛА К ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ.

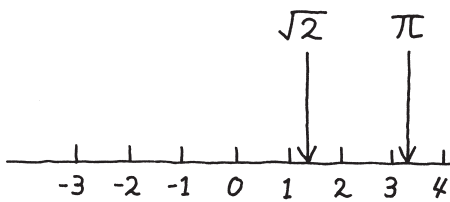
ОБЪЯСНЕНИЕ
Я СЕЙЧАС
ПРОПУСКАЮ, НО
НУЖНО ПОМНИТЬ, ЧТО
БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЕРИО-
ДИЧЕСКИЕ ДРОБИ - ЭТО
ТОЖЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ЧИСЛА.

■ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

А ЧТО, ЕСТЬ ЧИСЛА,
КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ
ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ
СООТНОШЕНИЯ
ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ?



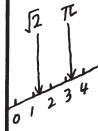
■ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА



Числовая
прямая.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ
ЧИСЛА ОБЪЕДИНЯЮТ
РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРА-
ЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

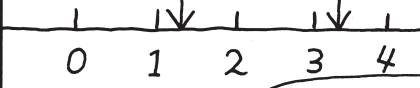
ЛИНИЯ, НА КОТОРОЙ
ОТМЕЧЕНЫ ПО ПОРЯДКУ
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА,
НАЗЫВАЕТСЯ "ЧИСЛОВОЙ
ПРЯМОЙ".



НА ЭТОЙ ЛИНИИ
ПОМЕЩАЮТСЯ
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ
ЧИСЛА?..

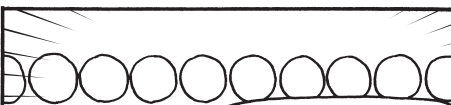
ЕСЛИ НА ЭТОЙ ЛИНИИ ПО ПОРЯДКУ
ОТМЕЧАТЬ ВСЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ
ЧИСЛА ЧЕРНОЙ ТОЧКОЙ,
А ВСЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ -
БЕЛОЙ ТОЧКОЙ...

ЩЁЛК



КАК ТЫ ДУМАЕШЬ,
КАКОГО ЦВЕТА
СТАНЕТ ЛИНИЯ?

ЧЁРНЫЕ И БЕЛЫЕ ТОЧКИ
БУДУТ ЧЕРЕДОВАТЬСЯ...
ЛИНИЯ СТАНЕТ СЕРОЙ,
ЧТО ЛИ?



НУ ВОТ...
ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ:
ПРАКТИЧЕСКИ БЕЛОЙ!

ТО ЕСТЬ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ
ЧИСЕЛ НАМНОГО БОЛЬШЕ,
ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ?

Да, совер-
шенно
точно!

Рацио-
наль-
ные
числа

Иррацио-
нальные
числа

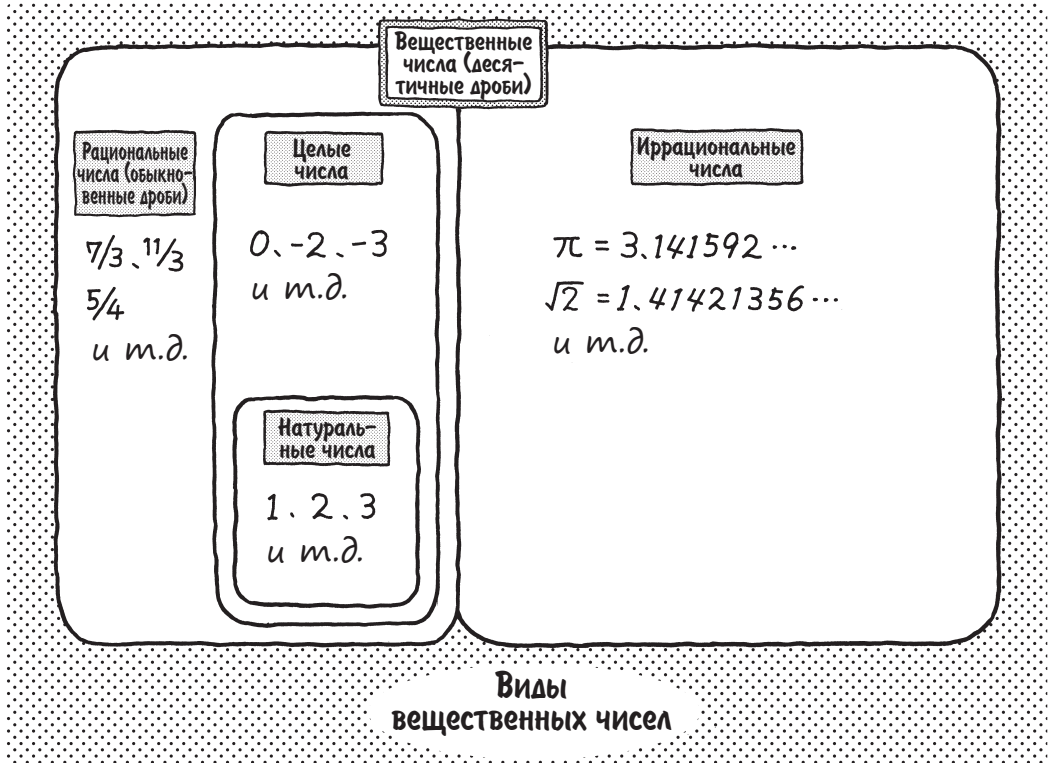
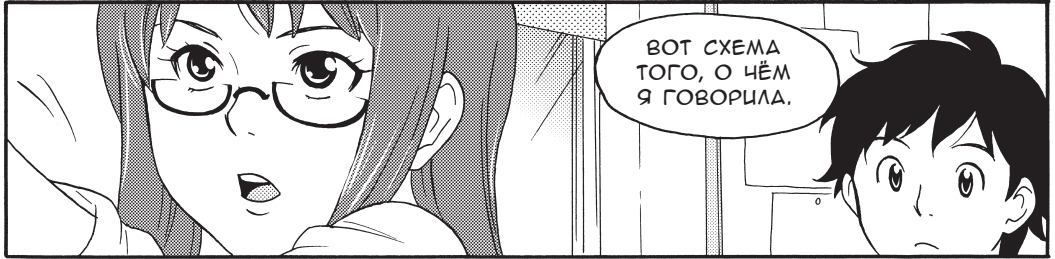
То
есть

ПОЭТОМУ
В МИРЕ БОЛЬШЕ
ИРРАЦИОНАЛЬНОГО,
ЧЕМ
РАЦИОНАЛЬНОГО,
ТАК?

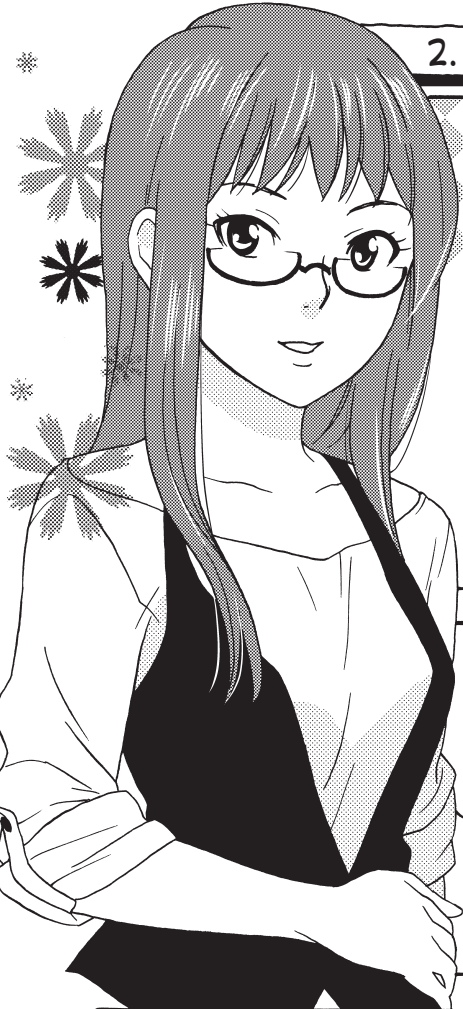
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА -
ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ
РАЦИОНАЛЬНЫМИ. ЭТО НЕ ИМЕЕТ
НИКАКОГО ОТНОШЕНИЯ
К ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В МИРЕ!

**СКРИП-
СКРИП**

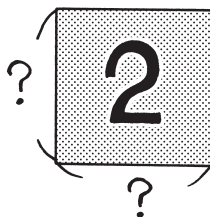
АААА...
ПОНЯТНО,
ХИМУРО-САН.



2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ



ТЕПЕРЬ Я ОБЪЯСНЮ,
КОГДА НАМ НЕОБХОДИМА
МНИМАЯ ЕДИНИЦА.



ЕСЛИ ПЛОЩАДЬ
КВАДРАТА РАВНА ДВУМ,
МОЖЕШЬ ПОСЧИТАТЬ
ДЛИНУ ЕГО СТОРОНЫ?

ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО $x^2 = 2$,
А ЗНАЧИТ, $x = \pm\sqrt{2}$.
ТАК КАК ДЛИНА СТОРОНЫ
КВАДРАТА НЕ МОЖЕТ БЫТЬ
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ...

ТО ОТВЕТ $\sqrt{2}$.

АГА,
МОЛОДЕЦ-МОЛОДЕЦ!

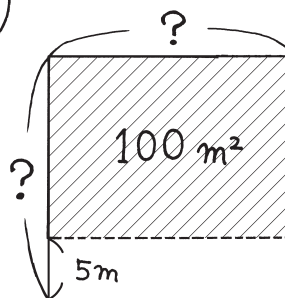
хлоп

хлоп

КАК-ТО СОВСЕМ
НЕЭМОЦИОНАЛЬНО
ОНА ЭТО ГОВОРИТ...

ТЕПЕРЬ
СЛЕДУЮЩАЯ ЗАДАЧА.

ОДНА СТОРОНА
ПРЯМОУГОЛЬНИКА
НА 5 М ДЛИННЕЕ
ДРУГОЙ СТОРОНЫ.
ПЛОЩАДЬ
ПРЯМОУГОЛЬНИКА
РАВНА 100 М². НАЙДЕМ
И ТУТ СТОРОНЫ
ПРЯМОУГОЛЬНИКА.



СНАЧАЛА ПОПРОБУЙ
СОСТАВИТЬ КВАДРАТНОЕ
УРАВНЕНИЕ.



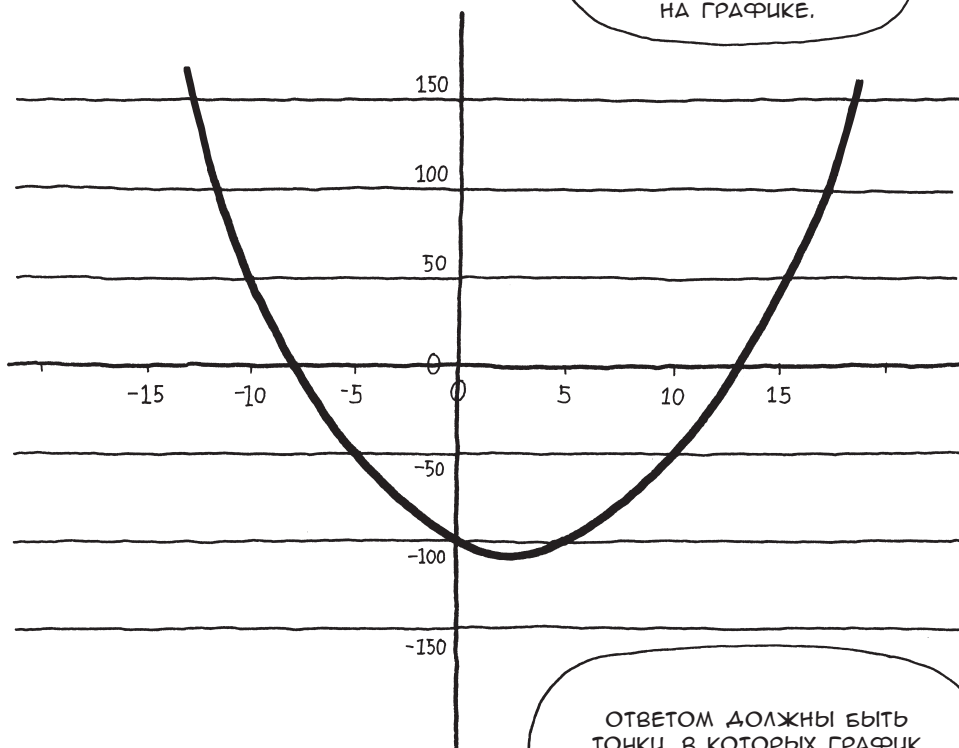
$$x(x-5) = 100$$

$$x^2 - 5x = 100$$

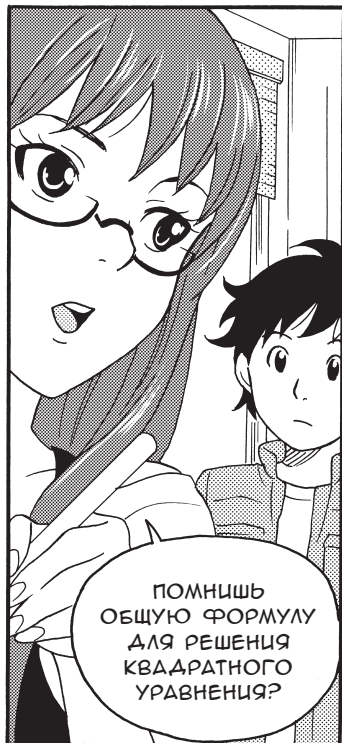
$$x^2 - 5x - 100 = 0$$

ХОРОШО.

ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЕМ
ИЗОБРАЗИТЬ ФУНКЦИЮ
ИЗ ПРАВОЙ ЧАСТИ НАШЕГО
КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
НА ГРАФИКЕ.



ОТВЕТОМ ДОЛЖНЫ БЫТЬ
ТОЧКИ, В КОТОРЫХ ГРАФИК
ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ x , ТАК?



Квадратное уравнение

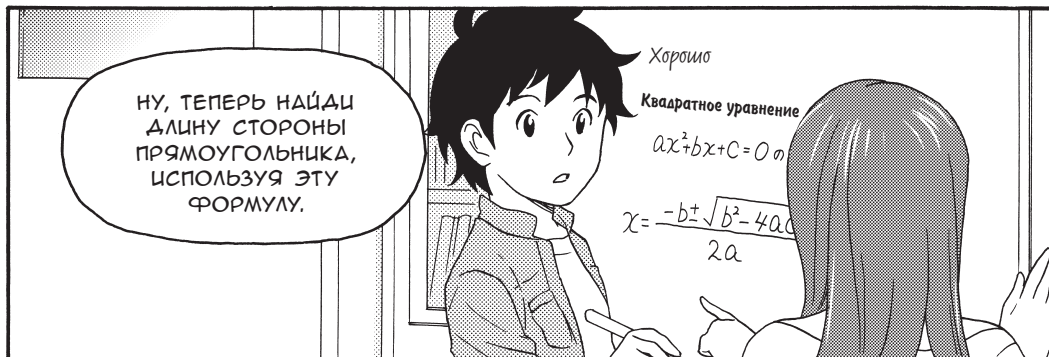
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



СКРИП



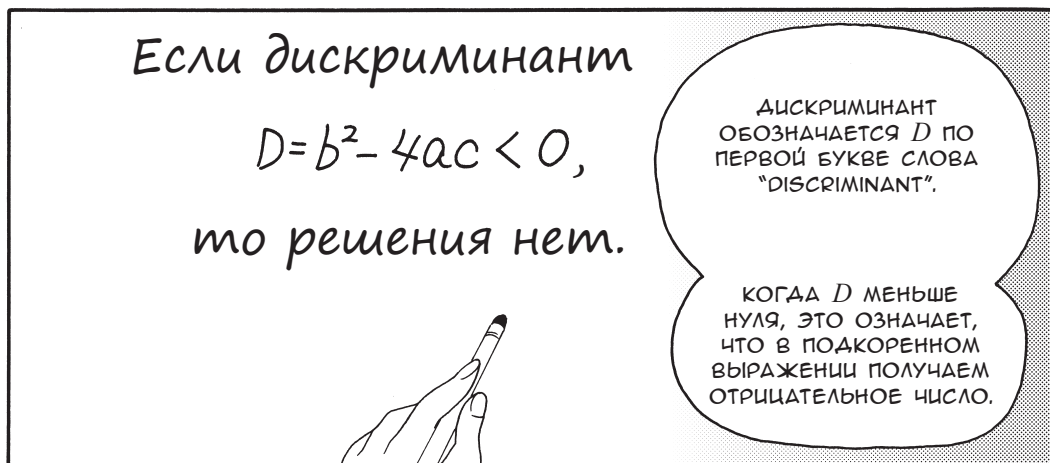


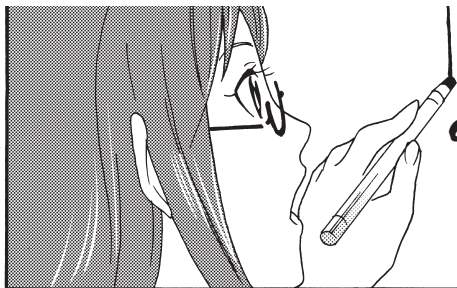
$$a=1 \quad b=-5 \quad c=-100$$

Подставим эти значения:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-100)}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 400}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{425}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 \times 17}}{2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{17}}{2}$$



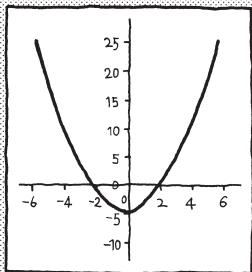




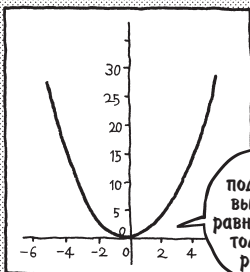
СКРИП

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ ПАРАБОЛЫ НА ГРАФИКЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАВИСИТ ОТ ЗНАКА СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА a . ЕСЛИ ОН ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ, ВЕТВИ ПАРАБОЛЫ НАПРАВЛЕННЫ ВВЕРХ, И НАОБОРОТ. РАССМОТРИМ ГРАФИКИ ДЛЯ ОБОИХ СЛУЧАЕВ.

$ax^2 + bx + c = 0$, когда a – положительный

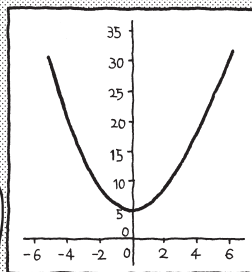


Если $D > 0$



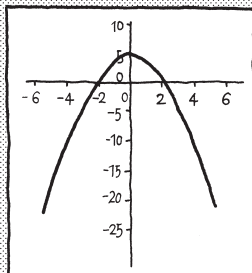
Если $D = 0$

Когда подкоренное выражение равно 0, имеем только одно решение.

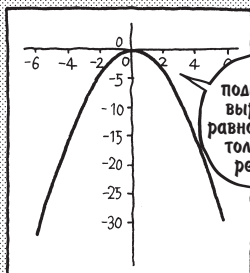


Если $D < 0$

$ax^2 + bx + c = 0$, когда a – отрицательный

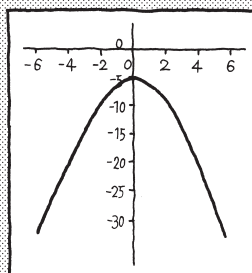


Если $D > 0$



Если $D = 0$

Когда подкоренное выражение равно 0, имеем только одно решение.



Если $D < 0$

В ОБОИХ СЛУЧАЯХ, И ЕСЛИ ВЕТВИ ПАРАБОЛЫ НАПРАВЛЕННЫ ВВЕРХ, И ЕСЛИ ВНИЗ, КОГДА $D < 0$, ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ X ...

Если $D = 0$

..., когда a – отрицательный

Когда подкоренное выражение равно 0, имеем только одно решение.

Если $D = 0$

ТАК И ВЫГЛЯДИТ ГРАФИК, КОГДА У УРАВНЕНИЯ НЕТ РЕШЕНИЯ.



В КОНЦЕ КОНЦОВ, ЧТО ЖЕ ЭТО ЗНАЧИТ, КОГДА НЕТ РЕШЕНИЯ?